Roliga aritmetiska uppgifter – Blandade nivåer

1. När man utför division med bråk brukar vi mattelärare slarvigt säga att man vänder på bråket i nämnaren och sedan multiplicerar man det med täljaren. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ förklara varför den här metoden fungerar.

2. Joakim menar att det är ganska lätt att räkna ut $\underbrace{3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + \cdots + 3^3 + 3^3}_{\text{81 additioner}}$
   Visa att han har rätt.

3. Oändliga serier är något som man ofta använder i matematiken för att bevisa satser och visa på förändringar i processer. En oändlig serie kan antingen konvergera eller divergera. En serie som konvergerar går mot ett specifikt värde. En serie som divergerar går mot ∞.

   a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ... är en klassisk oändlig serie som är konvergent. Vilket värde går serien mot?

   b) En likande serie är $2 + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \frac{2}{32}$ ... Vilket värde går serien mot?

   c) Vilket värde går serien $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \frac{a}{16}$ ... mot?

   d) Kan du bevisa a), b) och c)?

4. I Euklides Elementa finns ett bevis för att det finns oändligt många primtal. Enligt aritmetikens fundamentalsats kan man skriva alla positiva heltal som produkter av primtal. Till exempel kan talet 12 skrivas som $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Där 2 *och* 3 är primtal. Inom matematiken använder man sig ofta av motsägelsebevis. Det betyder att man visar på en motsägelse i ett antagande och således stämmer motsatsen till ens antagande. Euklides bevis för oändligt många primtal i Elementa är ett motsägelsebevis. Euklides antog att fanns ändligt många primtal som man kan skriva på en lista $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \ldots P_n$. Euklides multiplicerade sedan alla dessa primtal för att skapa talet $A = P_1 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_n$. Slutför Euklides bevis på egen hand och förklara varför det bevisar att det finns oändligt många primtal.

5. Beräkna följande kvoterna mellan de oändliga serierna (en oändlig serie är en serie som fortsätter adderas till ∞ (oändligheten))

a) $\frac{1+2+3+4+5+6+7\ldots}{4+8+16+32+64+128\ldots}$

b) $\frac{6+12+18+24+30\ldots}{2+4+6+8+10\ldots}$

6. Joakim vet att talet a^{123} är ett ojämnt tal för ett specifikt tal a. Han påstår att $a^{246}+6a^{123}+9$ aldrig är ett primtal. Förklara och visa hur Joakim vet det.

7. När man pratar om delbarhet lär man sig ofta om siffersumman för ett tal är delbart med 3 är också hela talet delbart med 3. Till exempel talet 414 har siffersumman $4+1+4=9$ vilket är delbart med 3 då är också 414 delbart med 3 ($138\cdot 3=414$). Kan du bevisa att det stämmer för alla tal? **Tips:** utgå från till exempel talet $a\cdot 100+b\cdot 10+c$ där $0<a,b,c<10$.

8. Ett tal är på formen 3^a-1 har alltid minst två delare om talet a går att skrivas på en specifik form. $a>1$

a) För vilka tal på a har 3^a-1 alltid minst två delare? Skriv ett generellt uttryck och nödvändiga villkor.

b) För vilka tal på a har 3^a-1 alltid minst tre delare? Skriv ett generellt uttryck och nödvändiga villkor.

9. Joakim vet att talet $2^{12876452}-49$ inte är ett primtal. Han är ingen aning om vad talet är men han är helt säker på att det inte är ett primtal. Hur kan han veta det?

10. Talet $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal, det innebär $\sqrt{2}$ inte går att skrivas som en kvot $\frac{a}{b}$. En stark bevismetod för matematiker är att göra ett motsägelsebevis. Man antar motsatsen till det man vill bevisa och visar på att det uppstår en motsägelse och då har man bevisat det man vill visa. Du kan bevisa att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal om du gör just ett motsägelsebevis. Antag att $\sqrt{2}$ går att skriva som en kvot $\frac{a}{b}$ och att kvoten är på den enklaste formen möjligt (minsta gemensamma nämnaren är 1).

    a) Bevisa att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal
    b) Bevisa att $\sqrt{8}$ är ett irrationellt tal
    c) Bevisa att $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ är ett irrationellt tal