Lite svårare uppgifter från hela kursen – Ma3c

Kapitel 1

1. Förenkla uttrycken

a) $\frac{a^2x-b^2y^2}{a\sqrt{x}+by}$

b) $\sqrt{\frac{x^{\frac{7}{2}}}{x\sqrt{x}}}$

c) $\frac{x^{\frac{5}{2}}\cdot y^2\cdot z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2yz^3}}$

d) $\frac{2x^3-20x\sqrt{x}+50}{2x\sqrt{x}-10}$

e) $\frac{x^3-2x^2+x}{x^4+2x^3-3x^2}$

2. För vilket/vilka värden på x är det rationella uttrycket odefinierat $\frac{7+x}{\sqrt{4x+\sqrt{36}}}$

3. Lös ekvationen $\sqrt{\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-2x}} = 1$

4. Lös ekvationen $x^4 - 4x^3 = 5x^2$

5. En andragradsfunktion har följande egenskaper

- $f(a+3)$ är en minimipunkt.
- $f(a+6)$ är ett nollställe

Bestäm $f(a)$

6. Förenkla uttrycket så långt som möjligt $\frac{x^{2n-1}+4x^{n-1}}{x^{n-1}+\frac{2}{x^n}} + \frac{4}{x^n+2}$

7. En andragradsfunktion $f(x)$ har följande egenskaper

- $f(0) = 4$
- $f(1) = 10$
- $f(-2) = -2$

Bestäm $f(x)$

8. Beräkna $\left|\sqrt{21} - 5\right| + \left|\sqrt{21} + 10\right|$

9. En exponentialfunktion $f(x)$ gäller följande

- $f(2) = 6$
- $g(x) = \frac{2}{3}x + 10$ är lika med $f(x)$ då $x = 3$

Bestäm $f(x)$

10. Förenkla uttrycket så långt som möjligt $\frac{x^{4n}-1}{(x^n+1)(x^n-1)}$

11. Lös ekvationen $|x^2 - 2| = 2$

12. $n \geq 1$, för vilket/vilka x är uttrycket odefinierat? $\frac{x-1}{(x+1)^n+(x+1)^{n+1}-(x+1)^{n+2}}$

Kapitel 2

1. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n}\right)^{n-1} + 2$

2. Talet e kan definieras som $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

   Bestäm följande. Svara exakt.

   a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

   b) $\lim_{n\to\infty} 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

3. Bestäm gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \left(e^{-\frac{12n}{11}} + \frac{10}{n} + 2\right)^2$

4. $f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$ bestäm $f(x)$

5. Bestäm $f'(x)$ till $f(x) = \frac{a+b}{x} + \frac{c+d}{2x}$ med hjälp av derivatans definition

6. Funktionen $p(x)$ definieras som $p(x) = f(x) + g(x)$. Visa att om $f(x)$ är ett förstagradspolynom och $g(x)$ är ett andragradspolynom att $p'(x) = f'(x) + g'(x)$ med hjälp av derivatans definition.

   Förtydligande: Visa att $p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h}$ är lika med $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

7. Derivera funktionerna och förenkla

   a) $f(x) = \frac{a^2x^2+b^2x}{ax}$

   b) $f(x) = \frac{e^{2x}-e^x}{2e^x}$

   c) $f(x) = e^{3x+ax} + x^{4a+5}$

   d) $f(x) = \frac{3^{2x}+9^{2x}+27^{2x}}{3^x}$

8. $f(x) = 4x^5 + 5x^4 + 10x^6$ bestäm $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

9. Visa med hjälp av derivatans definition att $f'(x) = \frac{-1}{(x+a)^2}$ för $f(x) = \frac{1}{x+a}$

10. $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$ bestäm $f'(0)$ **tips:** multiplicera inte alla parenteser. Använd en annan metod.

Kapitel 3

1. Ni har inte redskap att derivera följande funktion $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ men om ni vet att derivatan för funktion är $f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4}$ menar Joakim att ni kan lösa följande integral $\int_{-1}^{2} \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} + x \, dx$. Beräkna integralen.

2. Skissa grafen till $f(x) = \frac{1}{x} + x + 2$ inkludera också eventuella asymptoter i skissen

3. Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ som har följande egenskaper

- $f(a) = 2 \cdot F(a)$
- $f'(a) = 2 \cdot f(a)$
- $f''(a) = 2 \cdot f'(a)$

Där a är ett positivt heltal.

4. $f'(x) = e^{3x}$. $f(0) = \frac{1}{3}$

   Bestäm a algebraiskt om $\int_0^a f'(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\ dx$

5. $f(x)$ är ett exempel på en tredjegradsfunktion som har två extrempunkter i $x = 1$ och $x = -3$

   $g(x)$ är ett exempel på en andragradsfunktion som har en extrempunkt i $x = -3$
   $g(0) = 0$

   Bestäm $p'(x)$ om $p(x) = f(x) + g(x)$

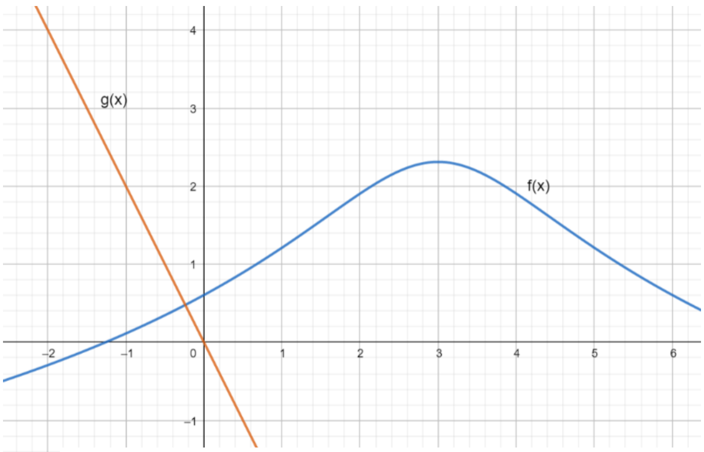
6. Funktionen $f(x) = \frac{1}{x} + 2x$ har en tangent $t(x)$ i $x = 1$ bestäm $\int_0^2 t(x)\ dx$

7. Bestäm ett exempel på fjärdegradsfunktionen som har följande egenskaper

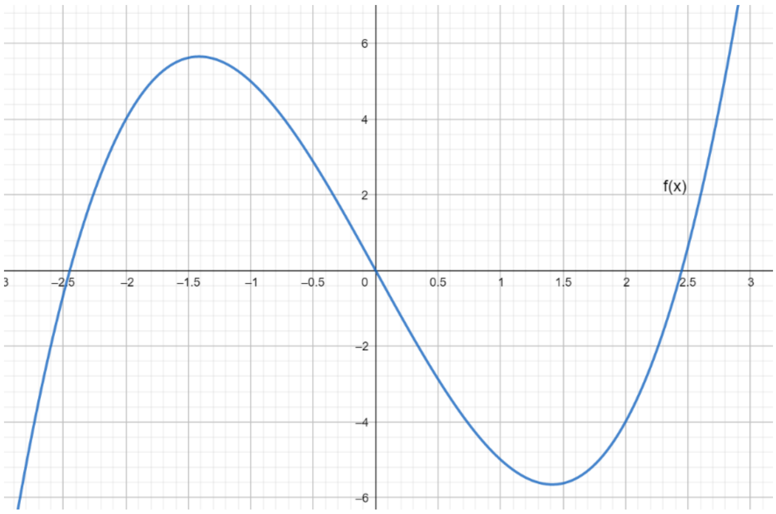
- Minimipunkt i $x = 1$
- Maximipunkt i $x = 0$
- Minimipunkt i $x = -1$

8. Beräkna $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$

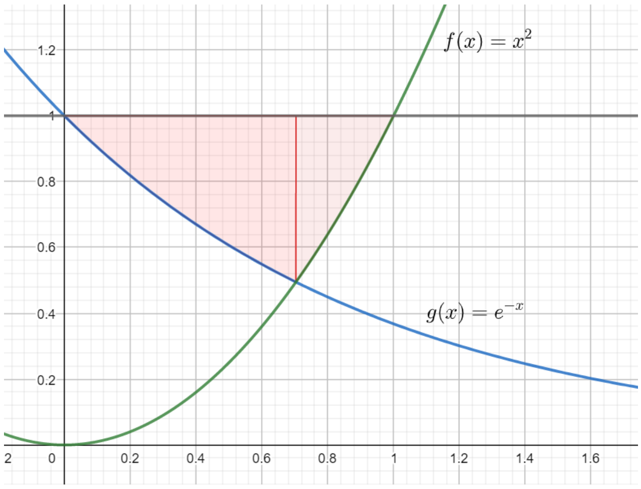
9. Nedan visas funktionerna $f(x)$ och $g(x)$. $h(x) = f(x) - g(x)$ bestäm $h'(3)$



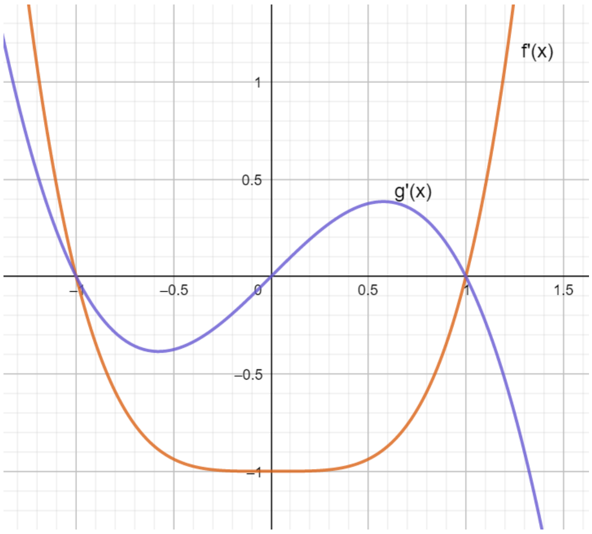
10. Beräkna integralen $\int_{-0.5}^{2} \mathrm{f}'(\mathrm{x})\ dx$ om funktionen nedan visar på $f(x)$



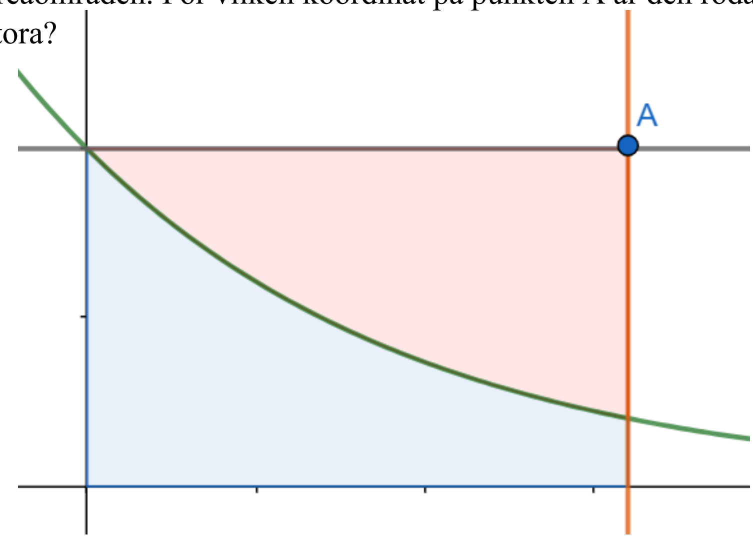
11. Bestäm den rödmarkerade arean. **Tips:** Använd geogebra



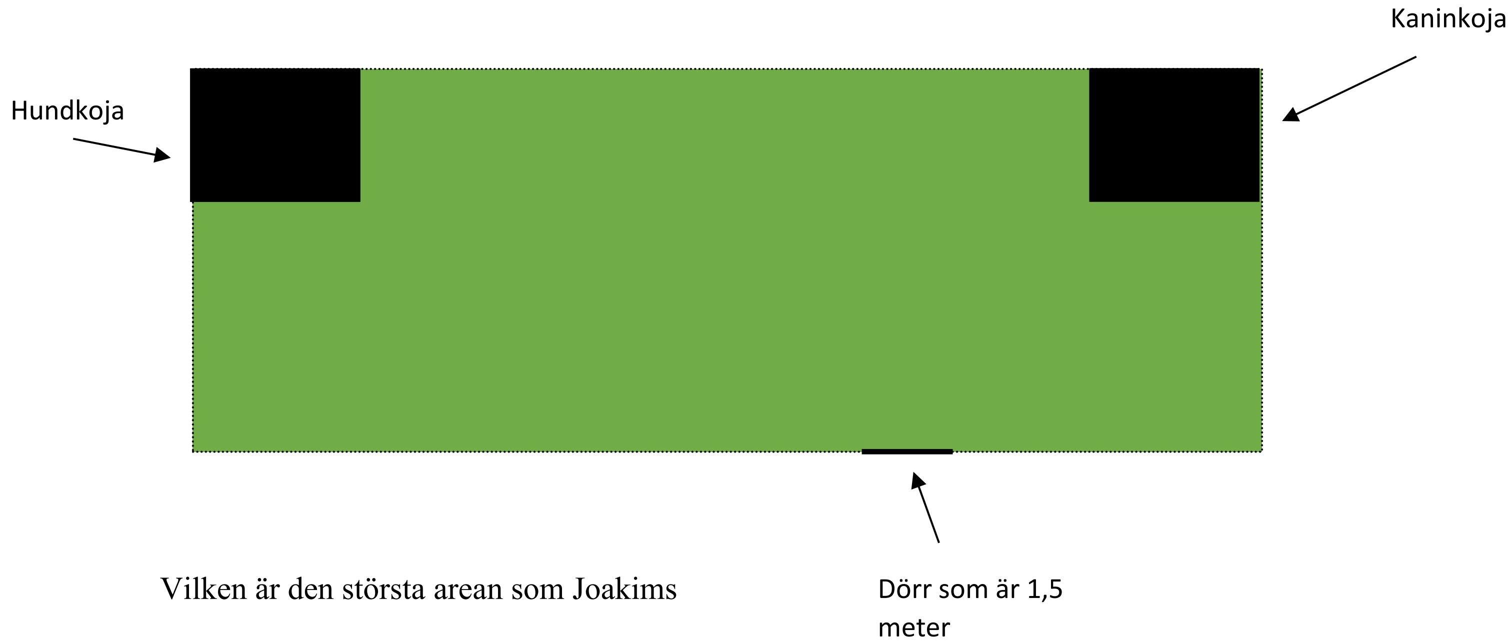
12. $h(x)$ definieras som $h(x) = g(x) + f(x)$ bestäm samtliga lösningar till ekvationen $h'(x) = 0$



13. Nedan visas $f(x) = e^{-x}$ och linjen $y = 1$ som tillsammans avgränsar två areaområden. För vilken koordinat på punkten A är den röda och den blå arean lika stora?

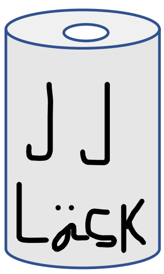


14. Joakim ska bygga ett inhägnat område. Han har totalt 100 meter staket som han kan använda. Han vill att hans hund och kanin ska få en varsin koja på det inhägnade området som båda ska vara 2 gånger 2 meter. Notera att där det är kojor behöver Joakim inte använda staket samt där dörren är. Hans skiss ser ut så här:

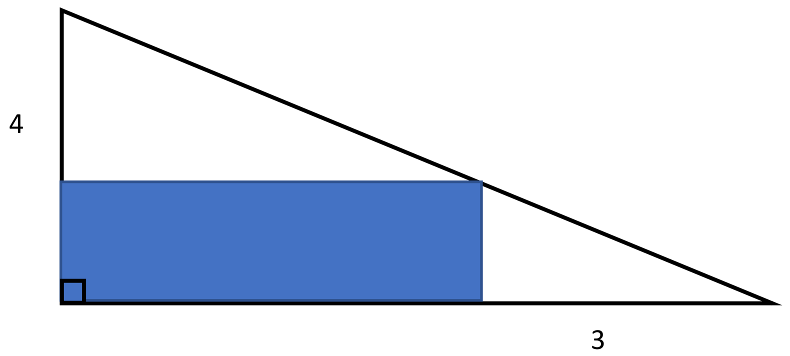


Vilken är den största arean som Joakims grönmarkerade område kan ha och vilka längder ska varje sida ha i det inhägnade området?

15. Joakims företag vill konstruera en burk som har en cirkulär botten som ska gå att fyllas med 0.5 dm^3 vätska. Men Joakims företag är såklart miljömedvetna, de vill använda så lite material som möjligt. Därför vill de minimera materialet för burken (så lite area som möjligt). Antag att toppen av burken har ett hål i form av en cirkel som har diametern 1 cm. Vilka dimensioner ska burken ha för att Joakims företag ska minimera materialåtgången, alltså så att burken innehåller så lite area som möjligt men samtidigt innehåller 0.5 dm^3 JJ-läsk?



16. Nedan ser du en rätvinklig triangel. Arean för den blå fyrhörningen med okända sidlängder är 12 a.e. Vilken är den minsta triangeln (i area) utifrån figuren som tillfredsställer kravet att ha en inritad fyrhörning som har arean 12 a.e?



17. Differensen av två tal är 40. Vilken är den minsta produkten du kan få av dessa tal och vilka två tal är det?

18. a) Visa att följande samband gäller för alla andragradsfunktioner

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)$$

b) Visa nu att det också stämmer för alla funktioner

19. Visa att följande samband gäller för alla funktioner

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Och

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) + g(x)dx$$

20. Lös ekvationerna

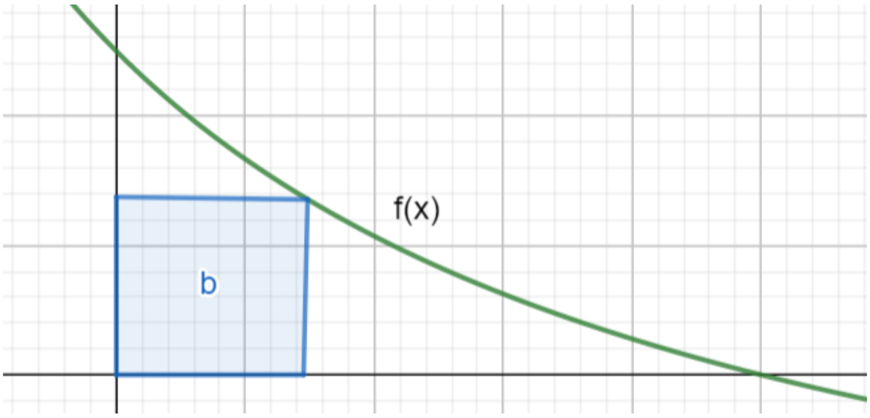
a) $e^{2x} - 8e^x + 16 = 0$

b) $e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$

c) $e^x - 10e^{\frac{x}{2}} + 25 = 0$

21. Du jobbar på ett företag Joakims el som ska dra en elkabel från ett elkraftverk till en ö. Elkraftverket ligger två km från kusten. Ön ligger en km från kusten i östlig riktning och sedan två km från elkraftverket i sydlig riktning. Att dra kabeln på land kostar 100 kr/m och i vattnet kostar det 50 kr/m. Joakims el vill såklart minimera kostnaden för kabeln. Hur ska kabeln dras och vad kommer den kosta om Joakims el vill minimera kostnaden?

22. Funktionen $f(x) = \frac{1}{x+1} - 0.5$ skapar tillsammans med de positiva koordinataxlarna en fyrhörning.



a) För vilket x-värde skapas det en kvadrat under funktionen $f(x)$?

b) Vilken är den största arean som fyrhörningen kan anta?

23. Den generella funktionen $f(x) = a - bx^2$ har definitionsmängden $x \geq 0$ och $a \geq 0$. Tillsammans med de positiva koordinataxlarna skapar funktionen en area.

a) Bestäm ett generellt uttryck för den arean

b) En rät linje $r(x)$ går igenom $f(x)$ skärningspunkter med y- och x-axeln. Vad är förhållandet mellan $f(x)$:s area och $r(x)$:s area som begränsas av de positiva koordinataxlarna?

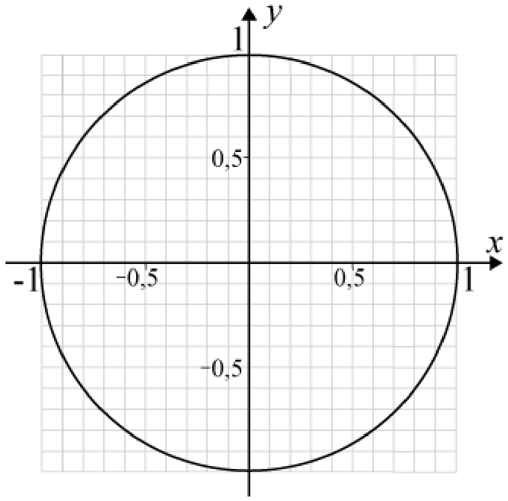
Kapitel 4

1. Visa att $sin120° \cdot sin60° + cos60° \cdot cos120° = cos60°$

2. Visa att $tan45° = \frac{sin90° - sin45°}{cos90° - cos45° + 1}$

3. Bestäm en vinkel v i enhetscirkeln som du vet värdena på $sinv$ och $cosv$. Visa sedan algebraiskt att följande samband stämmer

$$sinv \cdot sinv + cosv \cdot cosv + sin2v = 1 + 2 \cdot sinv \cdot cosv$$



4. På enhetscirkeln finns två punkter utmarkerade. Visa att följande samband gäller

$$\left(sin^2(v+u) + sin^2(v)\right) - \left(cos^2(v+u) + cos^2(v)\right) = 0$$