

Lite svårare uppgifter 2c

Förenklingar och ekvationer

1. Förenkla följande uttryck

a)
$$\frac{(2x+y)^2+(x-y)(x+y)-x^2}{2x^2+2yx}$$

b)
$$\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{x}}$$

2. Lös ekvationen
$$\frac{(x-1)^2+(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 1$$

3. För vilket/vilka x har ekvationen $x^2 - 2ax + 16 = 0$ enbart en lösning.

4. Lös ekvationen $6^{2x+1} \cdot 2^{1+4x} \cdot 3^{4x+1} = 100$. Svara exakt.

5. Förenkla uttrycket

a)
$$(\lg(x^2 - 6x + 9) - \lg(x - 3))$$

b) Bestäm värdet på uttrycket då $x = 10$

6. Lös ekvationen
$$(4\sqrt{2x+1} - 4)^2 + 32\sqrt{2x+1} = 100$$

7. Lös ekvationen
$$\lg(x^2 - 4x + 95) = 2$$

8. Lös ekvationerna

a)
$$\sqrt{x^2 - 4x + \sqrt{16}} = (125x^3)^{\frac{1}{3}}$$

b)
$$\lg x + \lg x^2 + \lg x^3 = -\lg x^4 + 10$$

9. Förenkla uttrycken.

a)
$$\frac{2x^2-8x+8}{6x^2-12}$$

b)
$$\frac{x^4-1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\text{c) } \frac{x^3 \left(x^{\frac{1}{2}} + 1 \right)}{x^2 \sqrt{x} + x \lg 100}$$

10. Lös ekvationerna, svara exakt.

$$\text{a) } 346(5x + 271)^2 - 346(5x + 271) = 0$$

$$\text{b) } \frac{2^{(x+1)^2}}{2^{x^2}} = 16$$

$$\text{c) } \frac{2^{2x} + 8 \cdot 2^x + 16}{2^{2x} - 16} = 8$$

$$11. \text{ Lös ekvationen } 4^x = (3^x - 2^x)(3^x + 2^x)$$

$$12. \text{ Bestäm } A^2 - B^2 \text{ om } A = 1234^{2x} - 1234^{-2x} \text{ och } B = 1234^{-2x} + 1234^{2x}$$

Funktioner

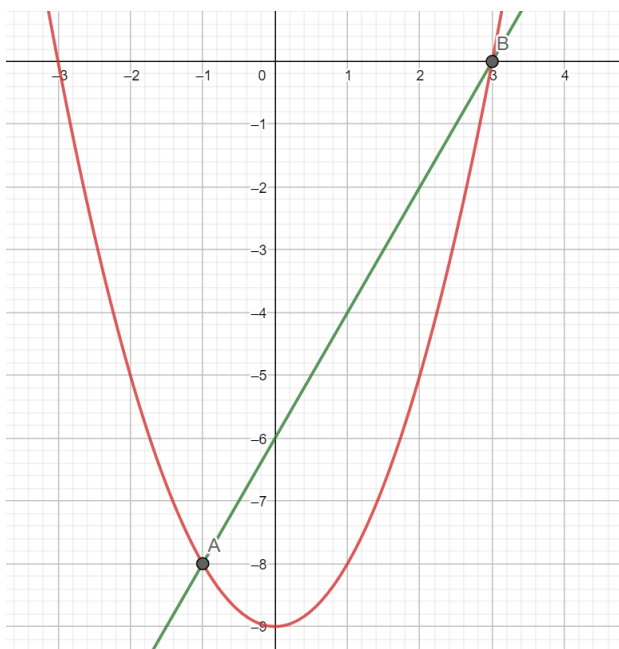
13. En andragradsfunktion har följande egenskaper

- $f(a + 3)$ är en minimipunkt.
- $f(a + 6)$ är ett nollställe

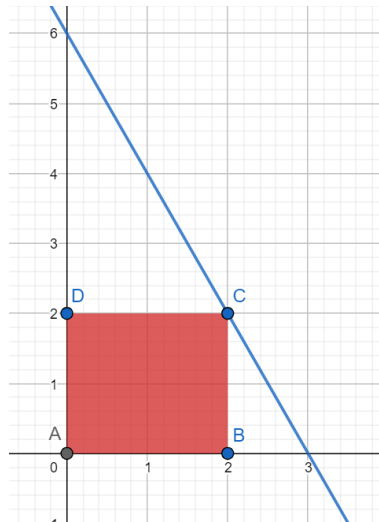
Bestäm $f(a)$

14. $f(x) = x^2 - 4x - 5$ och $g(x) = -x^2 - 5$ skär varandra i två punkter. Bestäm koordinaterna för dessa punkter.

15. x -värdet i punkterna A och B är lösningen på en viss ekvation, vilken?

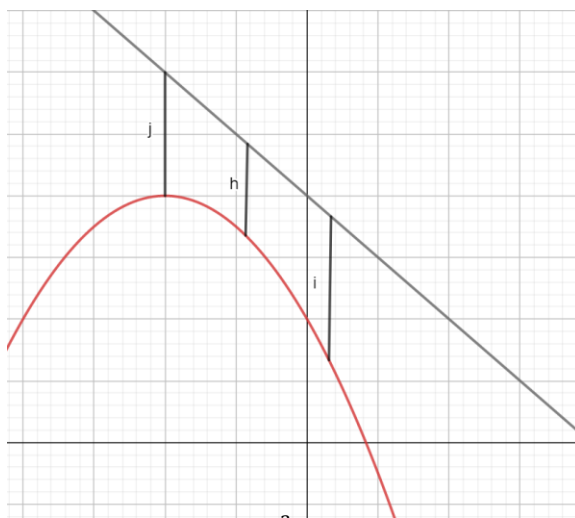


16. En röd låda (fyrhörning) placeras under en rät linje enligt bilden nedan. Lådan måste alltid vara under den räta linjen och avgränsas av de positiva koordinataxlarna. Lådans area kan variera beroende på vilken höjd och bredd den har. Vilken är den största arean som lådan kan ha?



17. $f(x) = x^2 - 4x$. Bestäm a om $f(a + 2) = 10$

18. Nedan visas en rät linje som kan beskrivas som $f(x) = -x + 4$ och en andragsradsfunktion som kan beskrivas som $g(x) = \frac{-x^2}{2} - 2x - 2$. Sträckorna j , h och i är avstånd mellan $f(x)$ och $g(x)$. Använd funktionerna och räkna ut det minsta avståndet som funktionerna har mellan varandra.



19. Funktionen $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 2$ är definierad mellan $-2 \leq x \leq 8$. Bestäm funktionens värdemängd.

20. En andragsgradsfunktion $f(x)$ har följande egenskaper

- $f(0) = 4$
- $f(1) = 10$
- $f(-2) = -2$

Bestäm $f(x)$

21. För en exponentialfunktion $f(x)$ gäller följande

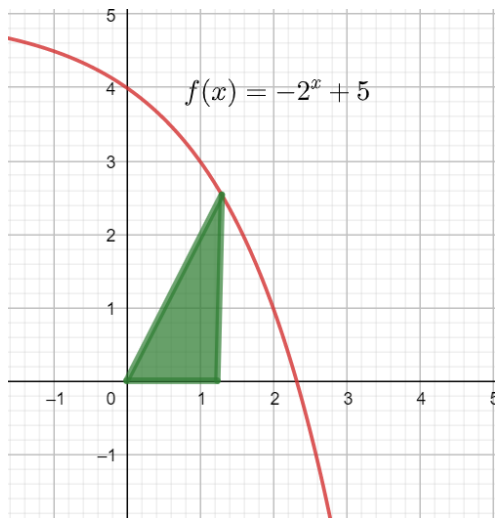
- $f(2) = 6$
- $g(x) = \frac{2}{3}x + 10$ är lika med $f(x)$ då $x = 3$

Bestäm $f(x)$

22. $f(x) = x^2 + 2x$. Förenkla följande uttryck $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

23. En rätvinklig triangel går att konstruera under funktionen $f(x) = -2^x + 5$. Bestäm den största arean som triangeln kan anta.

Tips: Använd geogebra för att lösa uppgiften.



24. Funktionen $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$ har två punkter P_1, P_2 på sig. Det du vet om punkterna är x -värdet är hälften av y -värdet. Bestäm koordinaterna för punkterna P_1, P_2 .

25. För vilket/vilka värden på a har ekvationen $f(x) = g(x)$ endast en lösning.
 $f(x) = -x^2 + 7, g(x) = x^2 - ax + 9$

26. Funktionen $h(x)$ definieras som $f(x) + g(x) = h(x)$. Vilket är det största värde som $h(x)$ kan anta. $f(x) = -x^2 + 4x$, $g(x) = -x^2 + 2$.

27. $\begin{cases} ax + 8 = 2y \\ 0 = 4x + m - 3y \end{cases}$ Bestäm a och m så att linjerna blir

- a) Parallella
- b) Vinkelräta

28. För en exponentiell funktion gäller följande:

- $\frac{f(b+7)}{f(b+4)} = 27$
- $f(4) - f(2) = 100$

Bestäm funktionen $f(x)$, svara exakt och förenklat.

Problemlösning

29.

- a) Joakim vill skapa en graf som beskriver världens näst högsta K2. Joakim vill ha en andragsradsfunktion där $H(m)$ ska beskriva höjden och m är hur många meter man gått vågrätt från början av berget. Berget är 8611 m högt och 4000 m brett. Du kan utgå från att bergets stigning startar i origo.
- b) Använd sedan din funktion för att bestämma hur högt upp du är på berget om du har gått 1000 meter i x -led

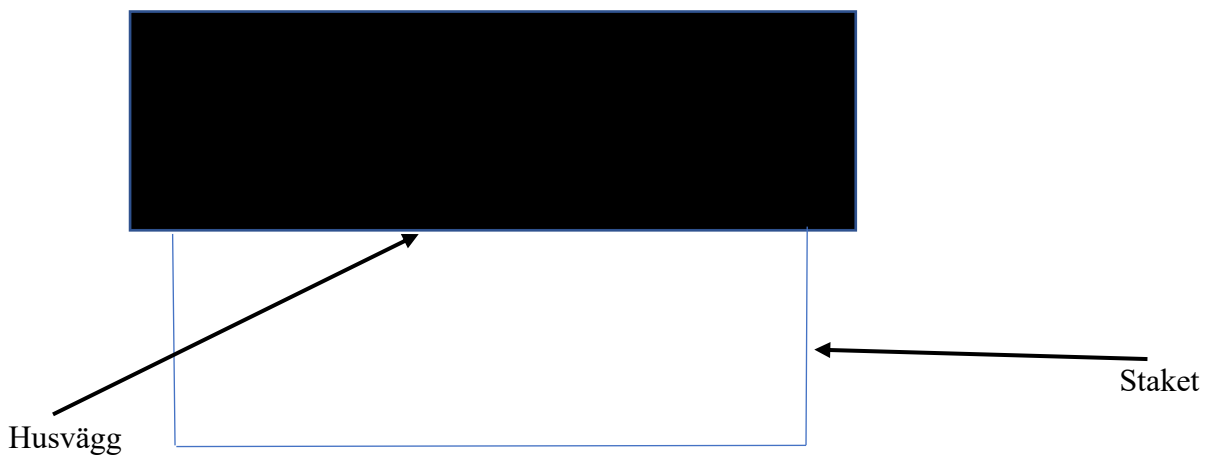


30. Två taxiföretag har två olika modeller för hur mycket man ska betala. Där $K(x)$ är kostnaden och x är antalet km.

Taxiföretag	Modell
Taxiföretag Joakim	$K(x) = 100x + 75$
Taxiföretag Joachim	$K(x) = 25 \cdot 1.25^{ax}$

Taxiföretaget Joachim har som mål att de ska vara billigare än taxiföretaget Joakim de första 5 km. Samma kostnad vid 5 km. Sedan dyrare när det överstiger 5km. Bestäm talet a så att taxiföretaget Joachim uppnår sitt mål.

31. Joakim ska bygga en inhägnad med staket mot sitt hus. Han vill att inhägnaden ska vara en fyrhörning och han har 40 m staket. Han vill ha så stor area som möjligt på sin inhägnad. Vilka dimensioner ska inhägnaden ha och vilken area kommer därmed inhägnaden ha?

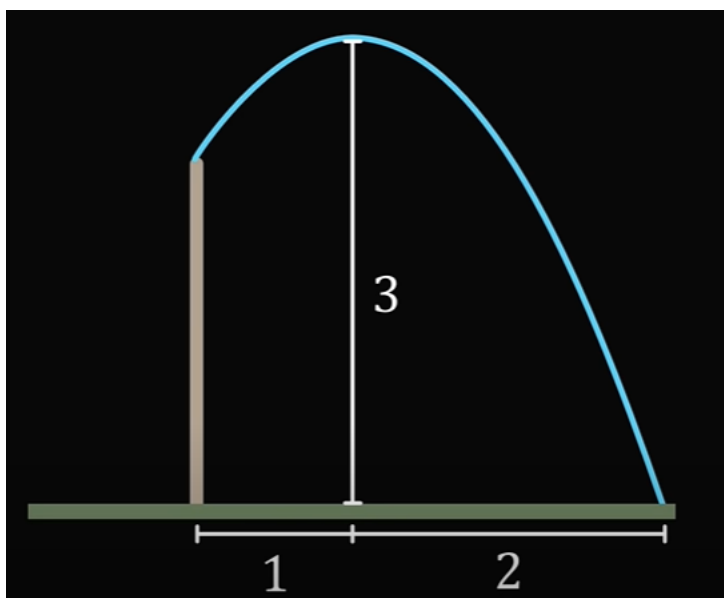


32. Joakim kastar macka på vattnet. Det innebär att han kastar en platt sten mot ett stilla vatten. Sedan hoppar stenen med hjälp av ytspänningen på vattnet ett antal gånger. Joakim kastar en sten som hoppar 4 gånger och menar att man kan beskriva detta matematiskt. För varje hopp på vattenytan minskar stenens höjd med 25% samt längden som den färdas i nästa hopp minskar med 25%.

Joakim kastar en sten som har sin högsta punkt 4 cm över vattenytan och färdas 2 meter. Bestäm funktionen som beskriver det fjärde hoppet.



33. En fontän har en okänd höjd. Den sprutar ut en vattenstråle som når 3 meter över marken som max och landar sedan 3 meter från fontänen. Se bild nedan. Bestäm fontänens höjd. Anta att vattenstrålen rör sig som en andragradsfunktion.



34. En basketspelare ska kasta ett straffkast. I ett straffkast i basket står du 4,6 meter från korgen som sitter 3 meter upp från marken och ska få bollen i korgen på ett kast. En basketspelare som är 2 meter lång kastar ett straffkast. Bollen lämnar spelaren 2 meter över marken och han träffar korgen. Bollen når sin maxhöjd efter att den färdats 3,6

meter längst med marken. Hur högt blev kastet? Anta att kastet kan beskrivas som en parabel.

35. Joakim och Joachim ska springa 100 meter. De startar samtidigt och Joakim springer 1 m/s snabbare än Joachim och Joakim springer hela distansen 2 sekunder snabbare än Joachim. Bestäm vilka tider Joakim och Joachim får på 100 meter.

36. Joakim står målvakt i laget Jideströms FF. Under en match slår han en utspark, det innebär att han lägger bollen i gräset och sparkar iväg den så långt som han kan. Bollen har en maxhöjd på 9 meter och når 60 meter. Joachim spelar också i Jideströms FF, han står 52 meter från punkten där Joakim sparkar ut sin utspark. Joachim har ambitionen att nicka vidare bollen. Joachim är 1,8 meter och kan hoppa 1,2 meter upp i luften. Kommer Joachim nå Joakims utspark med sitt huvud? Utsparken kan beskrivas som en parabel.



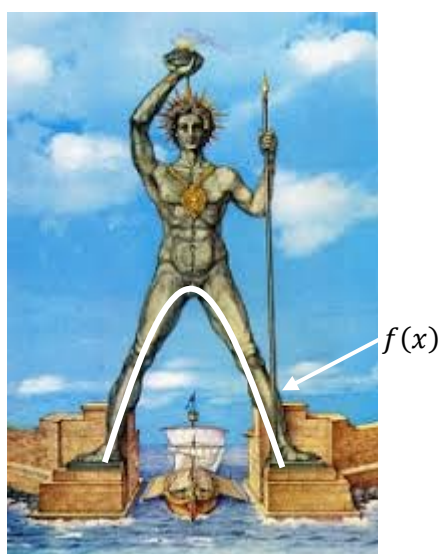
37. En simhoppare gör ett hopp från en 5-meters trampolin i en parabolisk bana. Hen når en maxhöjd på 7 meter från vattnet. När hen är 2 meter från trampolinen (längst med vattenytan) är hen tillbaka på 5 meters höjd. Hur långt från trampolinen är simhopparen när hen slår i vattnet?

38. Joakim håller upp kaffe i en mugg som till en början har en temperatur på 96 grader Celsius. Efter 5 minuter har kaffet tappat 20% av sin värme. Joachim håller upp te i sin mugg. Den är 80 grader Celsius till en början har tappat 20% av sin värme efter 8 minuter. Rummet Joakim och Joachim befinner sig i är det 20 grader Celsius. Anta att värmen minskar exponentiellt.

- a) Bestäm två olika funktioner $K(t)$ för kaffet och $T(t)$ som beskriver ovanstående värmeförändring. **Notera** att funktionerna ska anpassas så de är verklighetstroga i förhållande till rumsvärmen, värmen på dryckerna kan alltså inte bli lägre än rumstemperaturen.

b) Efter hur många minuter har dryckerna samma värme?

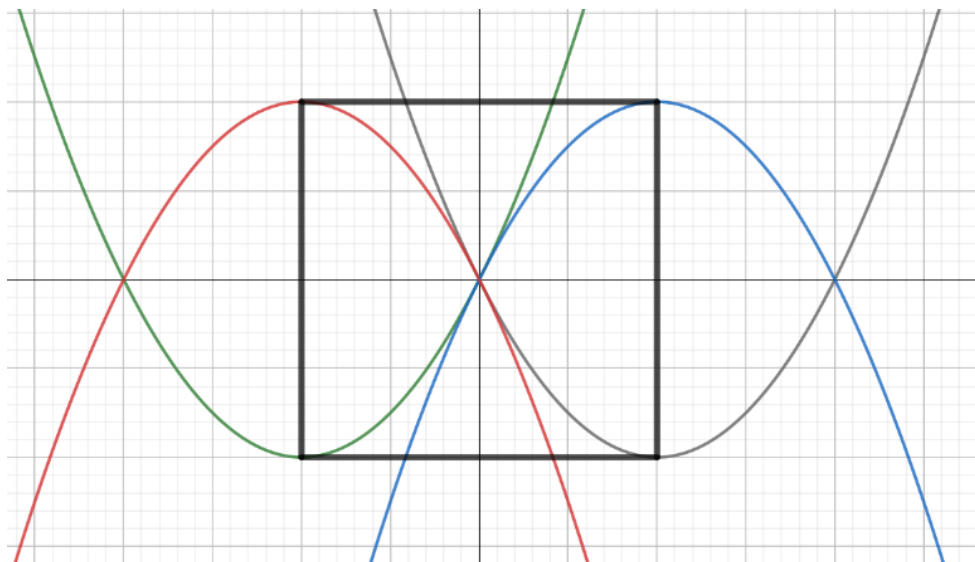
39. Kolossen på Rhodos var ett av Antikens 7 underverk. Enligt historiska källor stod den stora statyn gränslande mellan två 15 meter höga (i förhållande till vattenytan) piedestaler och själva statyn var 34 meter hög. Statyn stod vid ingången till hamnen på Rhodos. Om skeppen som skulle inte till Rhodos inte fick plats under statyn skulle de inte heller kunna komma in till hamnen. Vilken bredd och höjd kunde den största möjliga båten ha? Konstruera en funktion som hjälper dig. Utgå från rimliga antaganden när du löser uppgiften.



40. Fysikern och kemisten Marie Curies anteckningsböcker har en stor mängd radioaktivt radium (nuklid 226) på sig. Därför förvaras de i ett speciellt skåp i Frankrike för att ingen ska skadas av den farliga radioaktiviteten. Antalet radiumkärnor 2022 som finns på böckerna är ungefär 10^{25} st. Radiumkärnorna har en halveringstid på 1600 år. Det innebär att efter 1600 år har antalet radiumkärnor halverats i förhållande till vad det var från början, sedan fortsätter den processen med halvering var 1600 år. Nutidens kärnfysiker menar att 99% av radiumkärnorna måste försvinna innan böckerna kan visas för allmänheten igen. Hur lång tid kommer det ta?

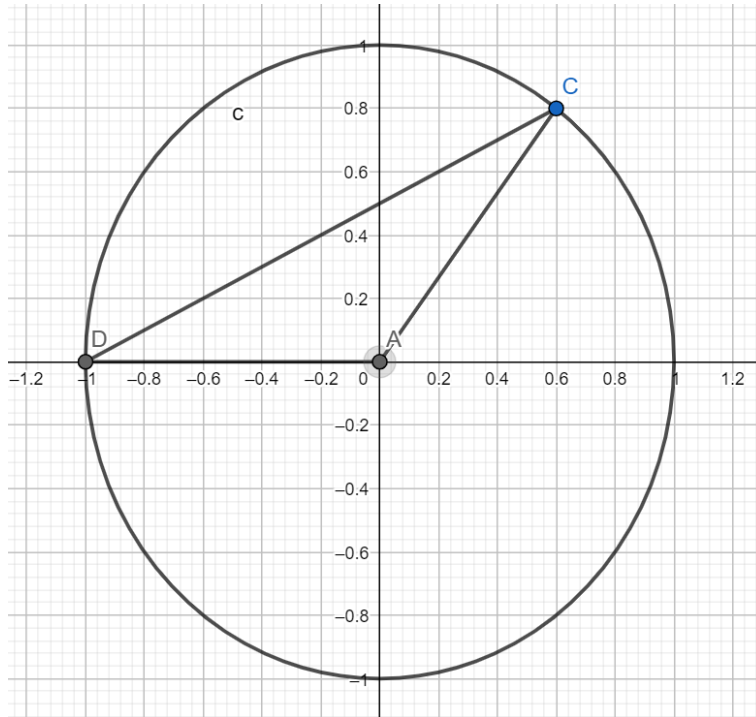


41. I Joakimland ska man snart rösta. Det finns flera partier men två av dem Gladpartiet och Snällpartiet har följande situation: Om 10 procentenheter av rösterna går från Gladpartiet till Snällpartiet kommer Snällpartiet vara två gånger så stort som Gladpartiet. Samtidigt om 10 procentenheter av rösterna går från Snällpartiet till Gladpartiet kommer Gladpartiet vara tre gånger så stort som Snällpartiet. Hur många procent av rösterna har respektive parti?
42. Joakim och hans kompis Pelle ska mötas upp i staden Jönköping som ligger mellan Norrköping och Göteborg. Mellan Norrköping och Göteborg är det 310 km. De startar samtidigt och sedan åker Pelle med en medelhastighet på 83 km/h och Joakim med en medelhastighet på 72 km/h. De kommer fram samtidigt till Jönköping. Hur långt är det mellan Norrköping och Jönköping respektive Göteborg och Jönköping.
43. Joakim och Joachim ska cykla en sträcka på 8 mil. Joakim börjar 08.00 med att cykla. Efter två timmar börjar Joachim cykla med en hastighet som är dubbelt så snabb som Joakims. De kommer fram exakt samtidigt.
- Hur lång tid tog det för Joachim att cykla sträckan?
 - Med vilken hastighet cyklade Joakim respektive Joachim?
44. Joakim tänkte investera i fonder och har två att välja mellan. Den ena fonden A beräknas öka med 11% varje år samtidigt har fonden en årsavgift på 10% av det startvärde man sätter in som man måste betala varje år. Fonden B förväntas öka med 5% per år och har ingen årsavgift. Vilken fond ska han investera i för att långsiktigt tjäna mest pengar.
45. Nedan ser du funktionerna $f(x) = -ax^2 + bx$, $g(x) = -ax^2 - bx$, $h(x) = ax^2 + bx$, $k(x) = ax^2 - bx$. Punkten för vertex för respektive funktion skapar en kvadrat. För vilka värden på a och b blir kvadratens area $100 a \cdot e$.



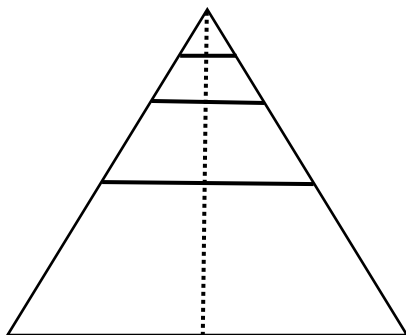
Geometri

46. Bestäm sträckan CD.



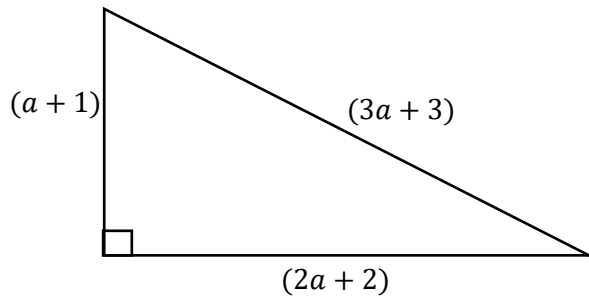
47. Triangeln nedan är en liksidig triangel med sidan a och höjden h som är streckad.

- Bestäm höjden h uttryckt i a
- Det dras sedan en linje parallell med basen som delar höjden h i två lika stora delar. Sedan dras ytterligare parallell linje som delar halva h i två lika stora delar och sedan en till parallell linje som delar den nya höjden i två lika stora delar. Sammanlagt skapas 4 trianglar. Bestäm arean på den minsta triangeln i a

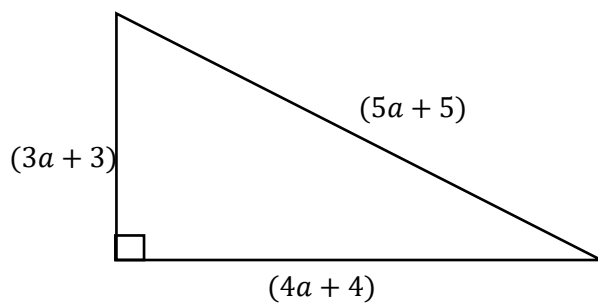


48. Det finns några vackra samband kopplat till Pytagoras sats.

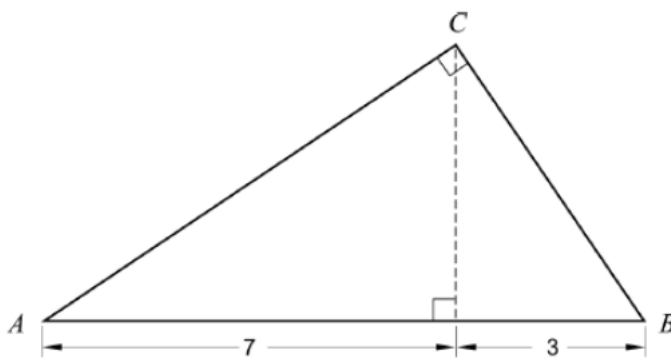
a) Undersök om det finns någon lösning om en rätvinklig triangel har följande sidor.



b) Undersök nu om det finns några lösningar om triangeln har följande sidor.



49. Bestäm arean av triangeln ABC. Svara exakt.



50. Sträckan AC är en cirkels diameter. Bestäm radien

